ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES
ECOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE, DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS, DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE DE LA MÉTALLURGIE ET DE L'INDUSTRIE DES MINES DE NANCY, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE

2ème épreuve P' MATHÉMATIQUES (4 h) 1982

Les suites et séries considérées dans ce problème seront toutes réelles.

Si $(u_n)_{n=1,2,\ldots}$ est le terme général d'une série convergente, le reste, d'ordre n, R_n sera défini par :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$$

Le problème comporte trois parties. Les deux premières parties sont indépendantes

1ère partie

1° - Soient a_n et b_n les suites définies par :

$$a_n = \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} \qquad b_n = \text{Log } a_n \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Montrer que la suite (b_n), n = 1, 2, ... est convergente, en considérant la série de terme général t_n, n = 1, 2, 3, ... défini par :

$$t_1 = -b_1 \quad ; \quad t_n = b_{n-1} - b_n \qquad \forall\, n \geq 2.$$

En déduire : $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$; $\ell > 0$.

Quel est un infiniment grand équivalent à n! ?

2° - Soit I_n, $n \in \mathbb{N}$ la suite définie par : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$

avec la convention : $\sin^0 x = 1$.

Etablir la relation de récurrence liant I_n à I_{n-2}. Calculer I_o et I_1. En déduire les expressions de I_{2p} et I_{2p+1} à l'aide de factorielles.

3° - Montrer : $\forall\, p \in \mathbb{N} \qquad I_{2p+2} \leq I_{2p+1} \leq I_{2p}$

En déduire : $\lim_{p\to\infty} \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} = 1$

4° - Montrer que la limite ℓ de la suite (a_n), introduite à la question 1°, vaut $\sqrt{2\pi}$.

5° - Montrer : $\exists\, \alpha, k \quad \alpha > 0, \ k > 0 \ : \ I_n \simeq \frac{k}{n^\alpha}$ lorsque n croît indéfiniment.

2ème partie

1° - Soit une série dont le terme général u_n vérifie :

$$u_n = \frac{\varepsilon_n}{n^\alpha}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

α est un réel donné, $\alpha > 1$; (ε_n) n = 1, 2, ... une suite telle que $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.

Montrer que le reste R_n de cette série convergente vérifie :

$$R_n = \frac{\eta_n}{n^{\alpha-1}}$$

avec (η_n), n = 1, 2, ..., $\lim_{n\to\infty} \eta_n = 0$.

2° - Soit une série, dont le terme général u'_n vérifie : $u'_n = \frac{\lambda_o}{n^\alpha} + \frac{\lambda_1}{n^{\alpha+1}} + \ldots + \frac{\lambda_p}{n^{\alpha+p}} + \frac{\varepsilon'_n}{n^{\alpha+p}}$

.../...

α est un réel donné, $\alpha > 1$; λ_o , λ_1, ..., λ_p une suite finie de p + 1 réels fixes ; (ε'_n) n = 1, 2, ... une suite telle que $\lim_{n\to\infty} \varepsilon'_n = 0$

Montrer qu'il existe une suite finie de p + 1 réels μ_o , μ_1 , ... , μ_p telle que le reste d'ordre n, R'_n de la série convergente u'_n vérifie :

$$R_n = \frac{\mu_o}{n^{\alpha-1}} + \frac{\mu_1}{n^{\alpha}} + \ldots + \frac{\mu_p}{n^{\alpha+p-1}} + \frac{\eta'_n}{n^{\alpha+p-1}} \quad \text{avec } (\eta'_n) \quad n = 1, 2, \ldots \quad \lim_{n\to\infty} \eta'_n = 0.$$

Indication : Considérer les suite et série de terme général : (a_n), n = 1, 2, ... ; (v_n), n = 1, 2, ... définies par les relations :

$$a_n = \frac{\mu_o}{n^{\alpha-1}} + \frac{\mu_1}{n^{\alpha}} + \ldots + \frac{\mu_p}{n^{\alpha+p-1}} \text{ , } n = 1, 2, \ldots$$

$$v_n = u'_n + a_n - a_{n-1} \text{ , } n = 2, 3, \ldots ; \quad v_1 = u_1 - a_1$$

Montrer que les (p + 1) réels μ_o , μ_1 ..., μ_p peuvent être choisis de façon que v_n soit un infiniment petit d'ordre supérieur strictement à $1/n^{\alpha+p}$:

$$v_n = \frac{\zeta_n}{n^{\alpha+p}} \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \zeta_n = 0 \ ;$$

Remarquer enfin : $\sum_{k=n+1}^{\infty} v_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} u'_k - a_n$.

3ème partie

1° - Soient a'_n et b'_n n = 1, 2, ... les suites définies par :

$$a'_n = \frac{a_n}{\sqrt{2\pi}} \qquad b'_n = \text{Log } a'_n$$

Montrer : $\lim_{n\to\infty} b'_n = 0$; $b'_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} t_k$ n = 1, 2, ...

a_n, b_n, t_n sont les réels définis à la question I - 1°).

2° - Montrer que b'_n admet un développement limité, lorsque n tend vers l'infini, par rapport à 1/n à n'importe quel ordre p. Calculer le développement limité à l'ordre 3 :

$$b'_n = \frac{\mu_o}{n} + \frac{\mu_1}{n^2} + \frac{\mu_2}{n^3} + \frac{\eta'_n}{n^3}$$

avec : $\lim_{n\to\infty} \eta'_n = 0$.

En déduire le développement asymptotique de Log (n!), lorsque n croît indéfiniment, jusqu'au terme en $\frac{1}{n^3}$ inclus.

3° - Donner le développement limité de I_{2p} à l'ordre 3 par rapport à $\frac{1}{\sqrt{p}}$ lorsque p croît indéfiniment.

En remarquant que la quantité $c_n = n\, I_n\, I_{n-1}$, n = 1, 2 ... est une constante, donner de même le développement limité de I_{2p+1} à l'ordre 3 par rapport à $\frac{1}{\sqrt{p}}$ lorsque p croît indéfiniment.

En déduire un infiniment petit équivalent à $I_n - I_{n-1}$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail